RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS À 2 INCONNUES PAR LA MÉTHODE DES DÉTERMINANTS DE CRAMER.

Système étudié à titre d'exemple: $S\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 6x+7y=8 \end{cases}$

Appelons **A** la colonne $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, **B** la colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et **C** la colonne $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Première étape. *Calcul du déterminant Δ du système.*

On considère les colonnes **A** et **B** et on calcule le déterminant du système S c'est à dire:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$; $\Delta = 3\times7-6\times4=-3$

Comme Δ n'est pas nul, ce système admet un couple solution unique.

(Si le déterminant d'un système est nul, alors c'est un cas particulier qu'il faut étudier.)

Deuxième étape. *Calcul du déterminant Δ_x de x puis de la valeur de x.*

On remplace la colonne **A** par la colonne **C**, la colonne **B** ne changeant pas : $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

et on calcule le déterminant de x c'est à dire: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$; $\Delta_x = 5\times7-8\times4=3$

L'inconnue x vaut tout simplement: $\frac{\Delta_x}{\Delta}$ c'est à dire : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3}{-3}=-1$

Troisième étape. *Calcul du déterminant Δ_y puis de la valeur de y.*

On remplace la colonne **B** par la colonne **C**, la colonne **A** ne changeant pas : $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

et on calcule le déterminant de y c'est à dire: $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$; $\Delta_y = 3\times8-6\times5=-6$

L'inconnue y vaut: $\frac{\Delta_y}{\Delta}$ c'est à dire : $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-6}{-3}=2$

Le couple solution $(x\,;y)$ de ce système vaut donc : $(-1\,;2)$

Généralisation:

$S\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$; $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

Si Δ est non nul, alors:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed-fb$ et $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$.

De même:

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af-ce$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$. D'où le couple solution $(x\,;y)$ du système S.

****